

Colles de Maths - semaine 13 - MP-MP\*  
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

**Exercice 1** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'application qui à  $f \in E$  associe la fonction définie par

$$T(f) : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt. \end{cases}$$

Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer ses éléments propres.

**Exercice 2** Soit  $E$  l'ensemble des suites indexées par  $\mathbb{Z}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , bornées. Soit  $T$  l'application qui à  $u \in E$  associe la suite  $\left(\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Déterminer les éléments propres de  $T$ .

**Exercice 3** Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice à coefficients réels strictement positifs telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de  $A$  et que l'espace propre associé (sur  $\mathbb{C}$ ) est une droite.
2. Montrer que toute valeur propre complexe de  $A$  est de module inférieur à 1.
3. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1.

**Exercice 4** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de spectre  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Déterminer les valeurs propres de la comatrice de  $A$  en fonction des  $\lambda_i$ .

**Exercice 5** Soit  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il y a équivalence entre :

- (i) Tout sous-espace de  $E$  stable par  $u$  admet un supplémentaire stable par  $u$ .
- (ii) Le polynôme minimal de  $u$  est sans facteur carré, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $r \geq 1$  et  $P_1, \dots, P_r$  des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts tels que  $P = \lambda P_1 \dots P_r$ .

**Exercice 6** Soit  $K$  un corps,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer qu'il y a équivalence entre :

- (i) Les seuls sous-espaces de  $E$  stables par  $u$  sont  $\{0\}$  et  $E$ .
- (ii) Le polynôme caractéristique de  $u$  est irréductible sur  $K$ .

**Exercice 7** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , elles le sont aussi dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8** Soit  $n \geq 1$ . Montrer que les matrices de la forme

$$C_{a_0, \dots, a_{n-1}} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

avec  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  sont simultanément diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et déterminer leurs valeurs propres.